ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;
Ε2018

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbb{R} \qquad\qquad x \to f(x)$$

→ Το γράμμα x παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α και λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

→ Το πεδίο ορισμού Α της f συμβολίζεται με D_f.

2. Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το Α.

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y / y = f(x), x \in A\}$

3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης;

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f.

4. Πως προκύπτει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $-f$, $|f|$ με βοήθεια της γραφικής παράσταση της f;

Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x′x, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα x′x.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x′x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x′x, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες; **Κ 2007, Ε 2012, Κ 2016, Κ2021**

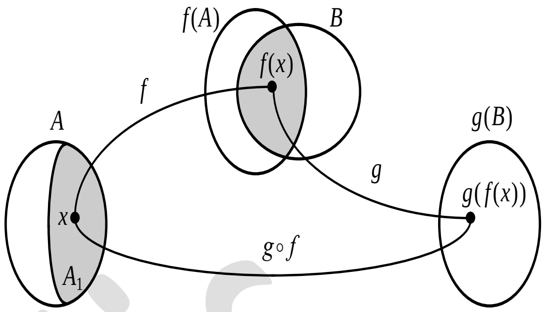
Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε f = g.

6. Πως ορίζονται οι πράξεις των συναρτήσεων;

Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού *A* και Β των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων

των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο
$\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

7. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g;



Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \,/\, f(x) \in B\}.$$

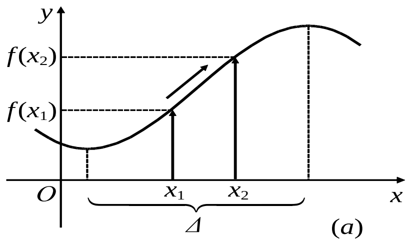
Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

ΣΧΟΛΙΑ

- Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

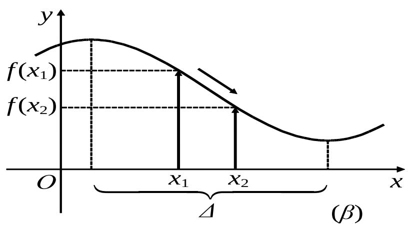
  Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

8. Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα, πότε γνησίως φθίνουσα και πότε γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;



Μια συνάρτηση f λέγεται:

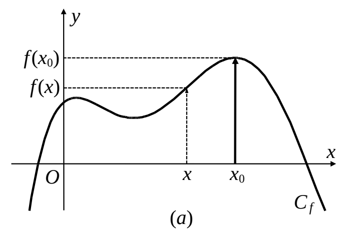
- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)



- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)

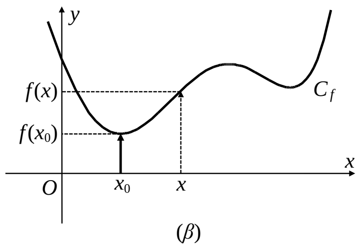
Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ, γράφουμε $f \nearrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \searrow \Delta$). Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

9. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο; K 2014,E 2010



Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. α)



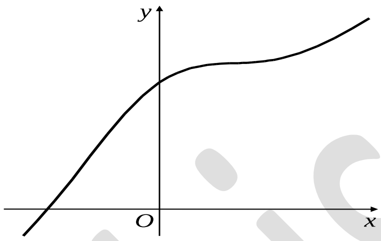
• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. β)

10. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1; Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι 1-1 μία συνάρτηση; Ε 2005, Ε 2015

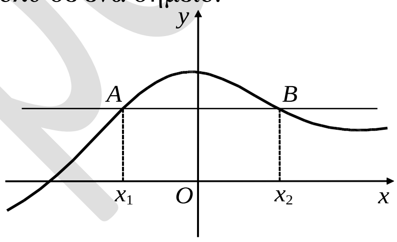
Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Τα κριτήρια για να είναι μία συνάρτηση 1-1 είναι τα εξής:
Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:
Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

ΣΧΟΛΙΑ

• Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:
– Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.
– Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.



συνάρτηση 1-1



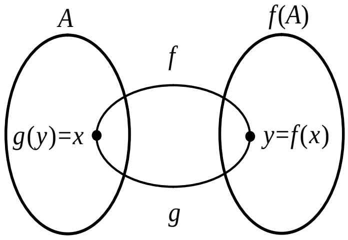
συνάρτηση όχι 1-1

• Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση 1-1.

Askisopolis

11. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f και τι γνωρίζεται για τις γραφικές τους παραστάσεις;

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι $1-1$, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.
Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:
– έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,
– έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
– ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.



Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}. Επομένως έχουμε

$$\boxed{f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$$

οπότε $f^{-1}(f(x))=x,\ \ x\in A$ και $f(f^{-1}(y))=y,\ \ y\in f(A)$.

12. Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄, δηλαδή την $y=x$.

ΟΡΙΟ –ΣΥΝΕΧΕΙΑ

13. Δώστε την έννοια του ορίου $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ με $\ell\in\mathbb{R}$.

Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

14. Πότε είναι καλά ορισμένο ένα όριο;

Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε «κοντά στο x_0» , δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή (α,x_0) ή (x_0,β).

15. Δώστε την έννοια των πλευρικών ορίων $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell_2$ με $\ell_1,\ell_2\in\mathbb{R}$.

- Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 από μικρότερες τιμές $(x<x_0)$, τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_1$.
- Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 από μεγαλύτερες τιμές $(x>x_0)$, τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell_2$.

Συνέπειες

→ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

→ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α,x_0) , τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell\ .$$

→ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0,β), τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

→ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-\ell\right)=0$

→ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

→ $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

17. Ποια θεωρήματα ισχύουν για το όριο και τη διάταξη;

Για το όριο και τη διάταξη ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

18. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων;

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(kf(x)\right) = k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ne 0$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x) \ge 0$ κοντά στο x_0.
7. $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x)\right]^\nu = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

19. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έστω $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots \alpha_1 x + \alpha_0\right) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right) + \lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right) + \lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha_1 x\right) + \lim\limits_{x\to x_0}\alpha_0 =$$

$$= \alpha_\nu \lim\limits_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1}\lim\limits_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \lim\limits_{x\to x_0} x + \alpha_0 = \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = P(x_0)$$

20. Να αποδείξετε ότι για τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$, με $Q(x_0) \ne 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

21. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **Ε 2016, Ε2020, Κ2021**

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$,τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

22. Ποια είναι τα βασικά τριγωνομετρικά όρια στο $x_0\in\mathbb{R}$;

1. $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$)

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$ 3. $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

23. Πως ορίζεται το όριο της σύνθεσης $f\circ g$ δύο συναρτήσεων f, g στο σημείο x_0 ;

Για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f\circ g$ στο σημείο x_0, εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u=g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x)\ne u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=\lim_{u\to u_0} f(u).$$

24. Δώστε την έννοια των ορίων $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (αντίστοιχα όταν $x\to-\infty$).

- Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα (αντίστοιχα μειώνεται απεριόριστα) με οποιονδήποτε τρόπο , τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$)
- Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό M, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα (αντίστοιχα μειώνεται απεριόριστα) με οποιονδήποτε τρόπο , τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$)
- Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό πραγματικό αριθμό $-M$ $(M>0)$, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα (αντίστοιχα μειώνεται απεριόριστα) με οποιονδήποτε τρόπο , τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$)

25. Ποιες είναι οι ιδιότητες του μη πεπερασμένου ορίου $x_0\in\mathbb{R}$;

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$.
3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=-\infty$, ενώ
αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.
5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$
6. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ
αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.
7. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.
8. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=+\infty$

<u>Συνέπειες</u>

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu}}=+\infty, \nu\in\mathbb{N}^*$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty, \nu\in\mathbb{N}^*$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty, \nu\in\mathbb{N}^*$,

Δηλαδή δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x)=\frac{1}{x^{2\nu+1}}, \nu\in\mathbb{N}^*$,

26. Ποια είναι τα όρια πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης στο ∞;

→ Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ με $\alpha_\nu\neq 0$, ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)$$

→ Για τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0}$, $\alpha_\nu\neq 0$, $\beta_\mu\neq 0$, ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}\right)$$

27. Ποια είναι τα όρια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού τους;

1. Αν $\alpha>1$, τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\log_\alpha x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$
2. Αν $0<\alpha<1$, τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\log_\alpha x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x=-\infty$

28. Τι ονομάζεται ακολουθία;

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$.

29. Πότε η ακολουθία (α_ν) έχε όριο $\ell\in\mathbb{R}$;

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell\in\mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\ell$, όταν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$.

30. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της; K2015, E 2009

Έστω μια συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

32. Πότε μια συνάρτηση θα λέμε ότι είναι συνεχής;

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση.

33. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (α, β); Ε 2004

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

34. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$; K 2008, K 2012, E 2004, K 2017, E2021

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

35. Αν δύο συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο x_0, τότε ποιες άλλες συναρτήσεις που ορίζονται μέσω των f,g είναι συνεχείς στο x_0;

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις: $f+g$, $c\cdot f$, όπου $c\in\mathbb{R}$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$

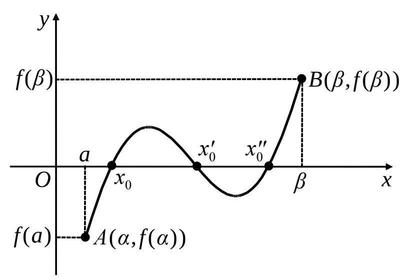
Επιπλέον αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

36. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να «δώσετε» την γεωμετρική του ερμηνεία. E2014, K2020

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Γεωμετρική ερμηνεία

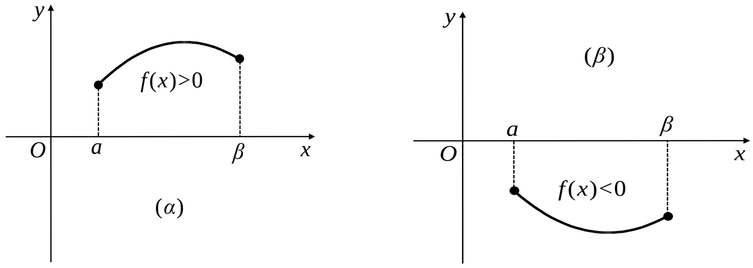
Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

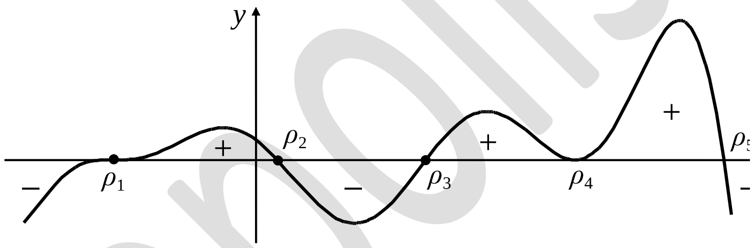


— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του πρόσημου της f για τις διάφορες τιμές του x.

Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.



β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

37. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, να το αποδείξετε και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία. **Κ 2005, Κ 2015, Κ 2020**

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

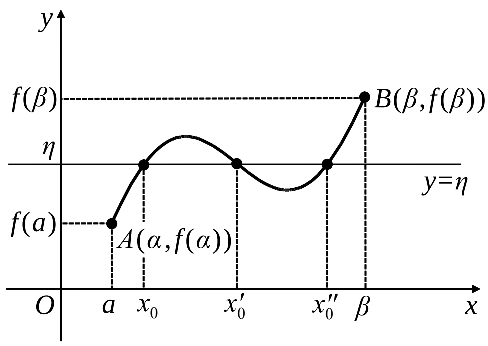
- **η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και**
- **$f(\alpha) \neq f(\beta)$**

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$.Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x \in [\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.



Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και τα ακριανά σημεία βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος τότε κάθε οριζόντια ευθεία $y=\eta$ με $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο.

38. Τι ισχύει για την εικόνα ενός διαστήματος Δ μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης;

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

39. Να διατυπώσετε για μια συνεχής συνάρτηση το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.
Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\mathbf{m \le f(x) \le M}, \quad \textbf{για κάθε} \quad \mathbf{x \in [\alpha,\beta]}.$$

ΣΧΟΛΙΟ
Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της. Τέλος, αποδεικνύεται ότι:
Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) όπου

$A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A).

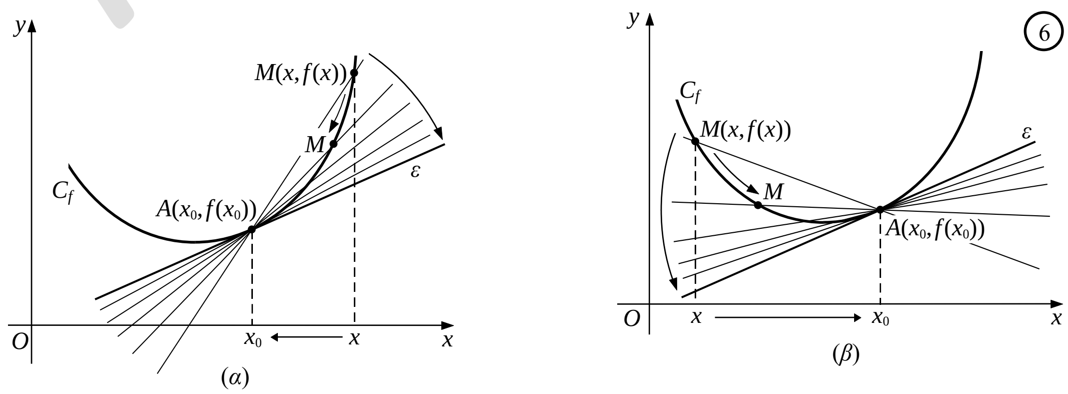
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

40. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$; **Κ 2000**

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το *A* και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$, όπου $\lambda = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

41. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.



Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο $M(x, f(x))$, $x \ne x_0$, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία *AM* που ορίζουν τα σημεία A και M, παρατηρούμε ότι:

Καθώς το x τείνει στο x_0 με $x > x_0$, η τέμνουσα ΑΜ φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση *ε* (Σχ. 6α). Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το *x* τείνει στο x_0 με $x < x_0$ (Σχ. 6β). Την οριακή θέση της ΑΜ θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α. Επειδή η κλίση της τέμνουσας ΑΜ είναι ίση με $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, είναι λογικό να αναμένουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα έχει κλίση το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

42. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
Κ 2004, Κ 2009

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Παρατήρηση

- Αν θέσουμε $x = x_0 + h$ τότε $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
- Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx ενώ το $f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$ οπότε $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ **(Συμβολισμός κατά Leibniz)**

43. Πως ορίζεται: α) η συνάρτηση θέσης ενός κινητού, β) η μέση ταχύτητα ενός κινητού, γ) η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και δ) η επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0;

α) Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t. Η συνάρτηση S καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t και ονομάζεται συνάρτηση θέσης του κινητού.

β)Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι κάποια χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στη θέση M_0 και ότι μετά από παρέλευση χρόνου h, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_0 + h$, βρίσκεται στη θέση Μ. Στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t η μετατόπιση του κινητού είναι ίση με $S(t)-S(t_0)$. Άρα, η μέση ταχύτητα του κινητού σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=\frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}$.

γ) Το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0, το ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $\upsilon(t_0)$. Δηλαδή: $\upsilon(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$. Δηλαδή, Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = s(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Επομένως $\upsilon(t_0)=s'(t_0)$.

δ) Η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή $\alpha(t_0)=u'(t_0)=s''(t_0)$.

44. Πότε ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά κοντά στο t_0;

Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}>0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0)\geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}<0$,οπότε είναι $\upsilon(t_0)\leq 0$

45. Τι ονομάζεται κλίση της f στο x_0 και ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0;

Κλίση της f στο x_0 ή συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο x_0, ονομάζεται το $f'(x_0)$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

46. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Κ 2000,Κ 2003,Ε 2007, Ε 2013, Κ2018

Για $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

47. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Α;

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in A$.

48. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της;

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$.

49. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της; Κ 2013,Ε 2010, Κ 2020

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

50. Ποια συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f; Κ 2020
Πως ορίζεται η νιοστή παράγωγος μιας συνάρτησης f με $\nu\geq 3$;

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f':A_1\to\mathbb{R}$, $x\to f'(x)$, η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f.

Η νιοστή παράγωγος της f με $\nu \geq 3$ συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$ και είναι: $f^{(\nu)} = \left[f^{(\nu-1)}\right]'$.

51. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{c - c}{x - x_0} = 0$. Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

52. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$. Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} 1 = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

53. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\nu, \nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)\left(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1}\right)}{x - x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1}, \text{οπότε}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0}\left(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1}\right) = x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \cdots + x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1}, \text{δηλαδή } (x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}.$$

54. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ε 2005,Ε 2009
Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}, \text{οπότε}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ δηλαδή. } \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Στο $x_0 = 0$ είναι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Askisopolis

55. Αν οι συναρτήσεις $f,g: A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in A$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. Κ 2020 Ε2020

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.

Γενίκευση: $(f_1+f_2+\ldots+f_k)'(x) = f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_k'(x)$

56. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Σημείωση

Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ τότε $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Το προηγούμενο θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι για τις τρείς συναρτήσεις ισχύει: $(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

57. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$

Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ τότε $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

58. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}, \nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^{-\nu}\right)' = -\nu x^{-\nu-1}$.

Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε: $\left(x^{-\nu}\right)' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$.

Askisopolis

59. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

60. Πότε η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και πότε σε ένα διάστημα Δ; Διατυπώστε τον κανόνα της αλυσίδας.

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))g'(x)$.

Δηλαδή, αν $u=g(x)$, τότε $\left(f(u)\right)'=f'(u)u'$.

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y=f(u)$ και $u=g(x)$, έχουμε τον τύπο $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

που είναι γνωστός ως κανόνας της αλυσίδας.

61. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

Είναι $y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

62. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$, δηλαδή $\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x\ln\alpha$.

Αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\ln\alpha$.

63. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$. **K 2008**

- αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ
- αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$.

  Επομένως, $y'=(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'=\dfrac{1}{-x}\cdot(-1)=\dfrac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

64. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ;

Ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

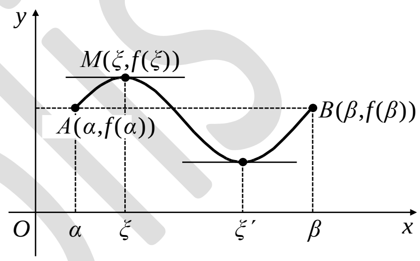
65. Τι ονομάζεται οριακό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος;

Αν Κ είναι το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους Κ ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0.

66. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
Ε 2007, Ε 2012, Ε2020, Ε2021

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



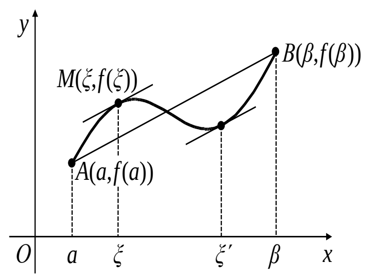
67. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
Κ 2003, Κ 2013,Ε 2008, Κ 2016

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.



68. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. Κ 2009, Κ 2014, Ε2004, Ε2021

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $\quad f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\qquad(1)$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

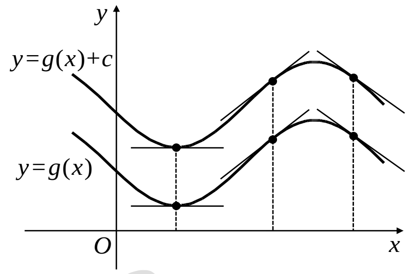
- Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1)=f(x_2)$.Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

69. Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.



70. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:
- **Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**
  Κ 2006, Κ 2012, Ε 2000, Κ 2017, Κ2019, Κ2021
- **Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.
Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

71. Να δώσετε τους ορισμούς για το τοπικό μέγιστο Κ 2012 Ε2020, το τοπικό ελάχιστο Κ 2015 και το τοπικό ακρότατο.

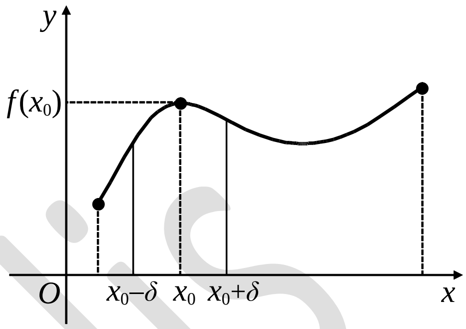
- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.
  Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.
- Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\ge f(x_0)$, για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.
  Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.
- Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f λέγονται τοπικά ακρότατα αυτής.

72. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.
Κ 2011, Κ 2004, Ε 2013, Ε 2016, Ε 2017

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.
Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta$ και
$f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$ Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

73. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα;

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:
1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

74. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:
i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.
Ε 2012, Κ 2016, Ε2020
ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)
Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.
ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

75. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).
Ε 2014, Ε2018

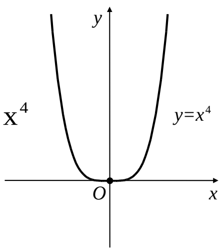
Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.
— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.
Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).
Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

76. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και πότε προς τα κάτω;
Κ 2006, Κ 2010, Κ 2013

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

77. Με βάση ποιο θεώρημα εξετάζουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης f; Ισχύει το αντίστροφό του; Δώστε παράδειγμα.

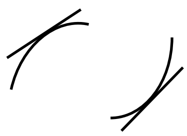
Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
- Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο *x* του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ
- Αν $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο *x* του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.



Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η f'' δεν είναι θετική στο 0 αφού $f''(0)=0$.

78. Ποια είναι η σχετική θέση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με μία εφαπτομένη της με βάση τη κυρτότητα της συνάρτησης f;

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



79. Πότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

80. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής;
Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της, τότε ποια σχέση ισχύει για τη δεύτερη παράγωγο της f στο x_0;
Πότε ένα σημείο είναι βέβαιο σημείο καμπής; Ε 2017

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:
i) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
ii) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''.
Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$.
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

81. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;
Κ 2010, Ε 2003, Ε 2015, Ε2020

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

82. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$); Κ 2007, Ε 2016

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

83. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, (αντιστοίχως στο $-\infty$); Κ 2005, Κ 2011

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$, αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$.
Θεώρημα: Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$

αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$

ΣΧΟΛΙΑ
1. Αποδεικνύεται ότι:
— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

—Στο $+\infty$, $-\infty$,εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$,αντιστοίχως διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$

84. Να διατυπώσετε τους κανόνες De L' Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

85. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ; **E 2006,E 2011,E 2014**

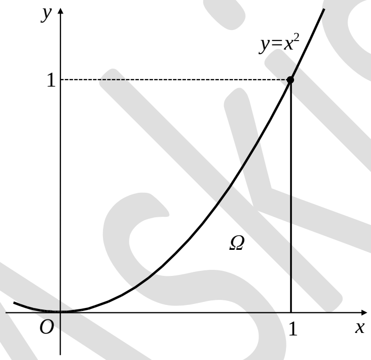
Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

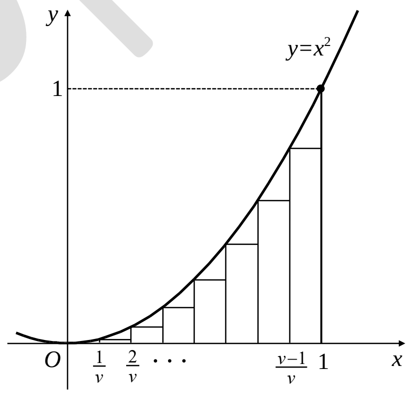
86. Να αποδείξετε ότι:
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε
- **όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και**
- **κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.**

K 2010, E 2001, E 2003, E 2015

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
  Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

87. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ είναι $E(\Omega) = \frac{1}{3}$.





Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής:

Χωρίζουμε το διάστημα [0,1] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{1}{\nu}$, με άκρα τα σημεία: $x_0 = 0$,

$x_1 = \frac{1}{\nu}$, $x_2 = \frac{2}{\nu}$, ……………., $x_{\nu-1} = \frac{\nu-1}{\nu}$, $x_\nu = \frac{\nu}{\nu} = 1$.

- Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. (Σχ. 6). Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_ν, των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

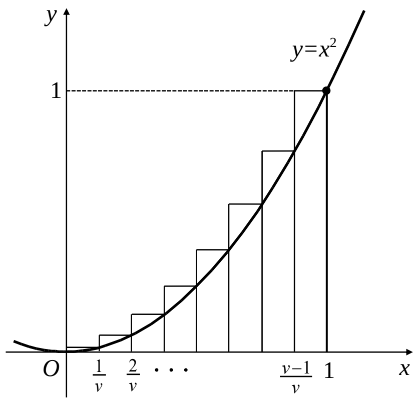
$$\varepsilon_\nu = f(0)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu}\left[0^2 + \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\nu^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2] = \frac{1}{\nu^3}\frac{(\nu-1)\cdot\nu(2\nu-1)}{6} = \frac{2\nu^2 - 3\nu + 1}{6\nu^2}.$$

- Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7), τότε το άθροισμα

$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Είναι όμως,



$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\cdot\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) = \frac{1}{\nu^3}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{2\nu^2 + 3\nu + 1}{6\nu^2}.$$

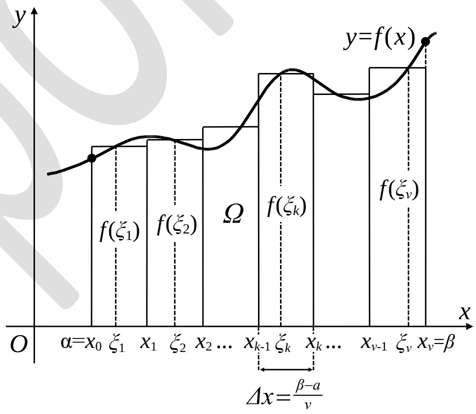
Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν Ε βρίσκεται μεταξύ των ε_ν και E_ν. Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_\nu \le E \le E_\nu$, οπότε

$$\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu \le E \le \lim_{\nu\to\infty}E_\nu. \quad \text{Επειδή } \lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu = \lim_{\nu\to\infty}E_\nu = \frac{1}{3}, \text{ έχουμε } E = \frac{1}{3}.$$

88. Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x) \ge 0$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$.
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι $S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = [f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_\nu)]\Delta x$



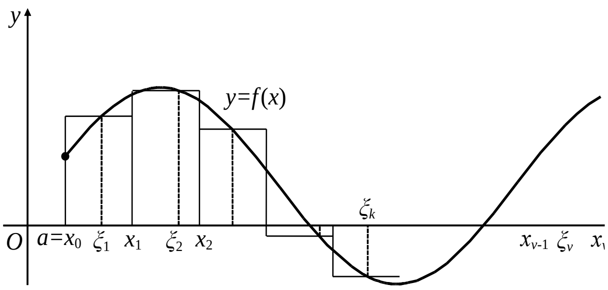
- Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \ge 0$.

89. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$.

Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα



$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ (1) .Αποδεικνύεται ότι,

“Το όριο του αθροίσματος S_ν , δηλαδή το $\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ”.

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το α στο β”. Δηλαδή,

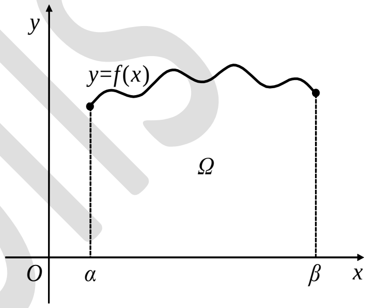
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Δηλαδή,

$\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$.

Επομένως Αν $f(x)\geq 0$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$



90. Ποιες οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ και γενικά
- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

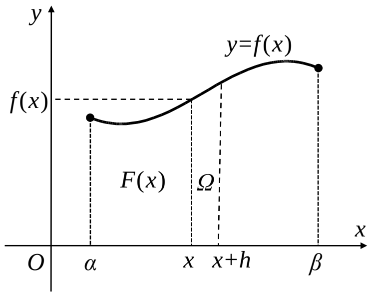
ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$.

91. Αν f μια συνεχής συνάρτηση σ΄ ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ, να γράψετε τι γνωρίζετε για την συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$.

Η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή

$F'(x)=\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.



- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$F(x+h)-F(x)=\int_{x}^{x+h} f(t)dt$ = Εμβαδόν του χωρίου $\Omega \approx f(x)\cdot h$,για μικρά $h>0$.

Άρα, για μικρά $h>0$ είναι $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x)$,οπότε $F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$

92. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού και να το αποδείξετε.
Κ 2002, Κ 2013, Ε 2008, Κ2018

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$. (1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$ οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

93. Ποιος είναι ο τύπος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης;

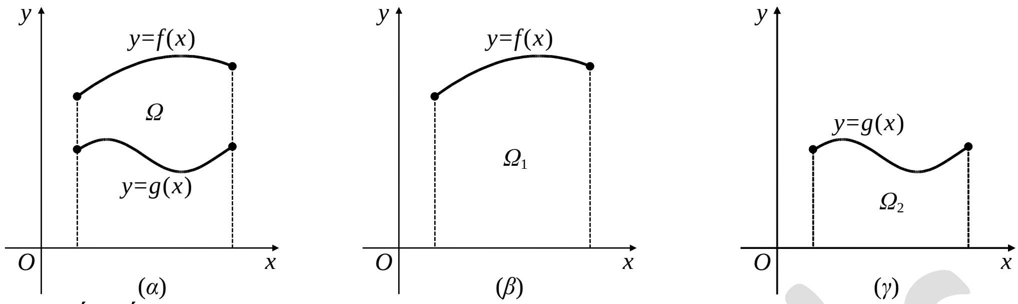
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ όπου f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

94. Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής;

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx=\int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f,g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

95. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g, και τις ευθείες x = α και x = β είναι: $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$



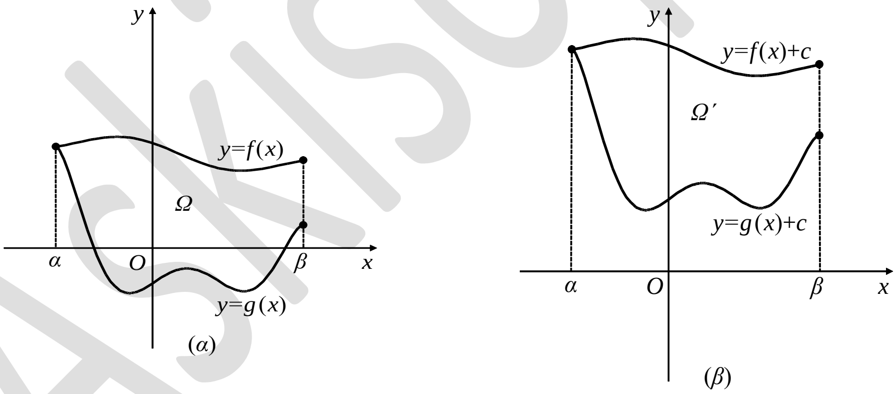
Παρατηρούμε ότι

$E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$. Επομένως,

$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

96. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $g(x)\leq f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g, και τις ευθείες x = α και x = β είναι: $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμό $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω'



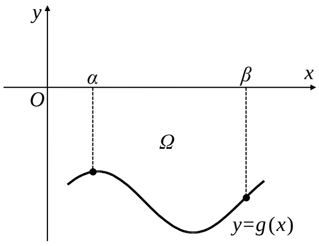
Επομένως

$E(\Omega)=E(\Omega')=\int_\alpha^\beta [(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.Άρα $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$.

97. Έστω, μια συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, του άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β είναι: $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x)=0$, έχουμε $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx=\int_\alpha^\beta [-g(x)]dx=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$.



Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε

$E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$